**QUESTION # 1** **(5 points)**

On considère la fonction

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad x > -1$$

**a)** Donner $T(x)$ la série de Taylor de $f(x)$ autour de $a = 0$. Spécifier $f^{(n)}(0)$.

**b)** Pour la série $T(x)$ obtenue en a), donner l'intervalle et le rayon de convergence. converge-t-elle aux extrémités de cet intervalle ? Justifier.

**c)** Considérons que $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Calculer $\lim_{n\to\infty} \left|P_n(x) - f(x)\right|$ où $P_n(x)$ est le polynôme de Taylor de degré $n$ de $f(x$

de $a = 0$. Qu'en concluez-vous?

**d)** Vous voulez approximer la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en utilis polynôme de Taylor de degré $n$ autour de $a = 0$. Quel degré minimal $n$ dev utiliser pour garantir que l'erreur soit strictement inférieure à 0,02 en chaque poin intervalle?

**<u>QUESTION # 2</u> (3 points)**

Soit l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^n = \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \sin(x),$$

où $C_n$ est un coefficient fonction de $n$.

Trouver les valeurs de $C_n$ pour lesquelles cette équation est satisfaite.

**QUESTION # 3** **(2 points)**

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Trouver la somme lorsqu'il y a convergence.

**a)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

**b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$$

**<u>QUESTION # 4</u>** **(3 points)**

Trouver la valeur positive de $x$ telle que

$$5\sum_{n=-1}^{\infty}(3-x)^{-n}=36\,.$$

**<u>QUESTION # 5</u>** **(3 points)**

Déterminer l'intervalle et le rayon de convergence de la série

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{100^{K}(x-1)^{2K}}{K}$$

**<u>QUESTION # 6</u> (4 points)**

Estimer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx,$$

tout en garantissant que l'erreur d'approximation soit inférieure à $5\times10^{-2}$